Ejercicio 30 (p. 66) de los propuestos en el libro de Merino-Santos, Algebra lineal. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular una matriz regular Q de orden 3, de forma que

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cómo podría utilizarse este resultado para resolver el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{aligned} x + 2y \qquad\quad + t &= 2 \\ x + y + 2z \qquad &= 1 \\ x \qquad\quad + 2z - t &= -2 \end{aligned}$$

Para resolver este tipo de ejercicio, como la matriz *H* a la que es igual *QA* es una escalonada reducida por filas, tomamos la matriz A añadiéndole a la izquierda la matriz identidad y le aplicamos transformaciones elementales fila a toda la matriz buscado la matriz escalonada reducida equivalente a *A* que debe ser *H*:

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f$$

$F_2 \leftrightarrow F_2 - F_1$

$F_3 \leftrightarrow F_3 - F_1$

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim_f$$

$F_2 \leftrightarrow -F_2$

$F_3 \leftrightarrow F_3 + 2F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim_f$$

$F_1 \leftrightarrow F_1 - 2F_2$

$F_3 \leftrightarrow -\frac{1}{2}F_3$

$F_1 \leftrightarrow F_1 - 4F_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$F_2 \leftrightarrow F_2 + 2F_3$

Luego, $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, siendo la F. Normal de Hermite H= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

¿Cómo podría utilizarse este resultado para resolver el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{aligned} x + 2y + t &= 2 \\ x + y + 2z &= 1 \\ x + 2z - t &= -2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que matricialmente el sistema es $Ax = b$ y como $\mathrm{Q}A = H$, multiplicando por la izquierda en ambos miembros del sistema por *Q*, tenemos que $\mathrm{Q}Ax = Qb$, y podemos obtener un sistema escalonado reducido equivalente al primero cambiando *QA* por *H*, a saber: $Hx = Qb$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - t &= -4 \\ y + t &= 3 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Como vemos hay 3 variables principales (*x, y, z*) y una ligada (*t*). Tomando la variables ligada como un parámetro, y despejando las variables libres en función de la ligada obtenemos la solución del sistema:

$$\left.\begin{aligned} x &= -4 + \lambda \\ y &= 3 - \lambda \\ z &= 1 \\ t &= \lambda \end{aligned}\right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$